Nominal-, Ordinal-, Verhältnis- und Intervallskalen

Vorgängig einige Begriffe aus der Mengenlehre:

Definition 1: y ist ein geordnetes Paar genau dann, wenn $y = (x,z) = \{\{x\}, \{x,z\}\}$

Geordnete Paare dienen dazu, Ordnung auszudrücken. Geordnete Paare können ineinander geschachtelt werden: $((x,y),z)$. Wir schreiben dafür (x,y,z) (= Tripel). $(((x,y),z),u) = (x,y,z,u)$ (= 4-Tupel).

Definition 2: A ist eine Relation genau dann, wenn für alle x gilt, wenn $x \in A$, dann gibt es ein y und ein z, so dass $(y,z) = x$.

Eine Relation ist somit eine Menge, die nur geordnete Paare enthält. Wenn A eine Relation ist, schreiben wir statt $(x,y) \in A$ auch Axy. Mengen von Tripeln nennen wir dreistellige Relationen, Mengen von 4-Tupeln nennen wir vierstellige Relationen. Für $(x,y,z) \in A$ schreiben wir auch $Axyz$. Analog für vierstellige Relationen $Axyzu$.

Definition 3: A ist eine Relation auf M genau dann, wenn für alle $(x,y) \in A$ gilt: $x,y \in M$

Definition 4: A ist eine Relation von B nach C genau dann, wenn für alle $(x,y) \in A$ gilt, $x \in B$ und $y \in C$.

Definition 5: K ist eine Äquivalenzrelation auf M genau dann, wenn K eine Relation auf M ist und für alle Elemente x,y,z von M gilt:
(a) Reflexivität für K: Kxx
(b) Symmetrie für K: Wenn Kxy, dann Kyx
(c) Transititivität für K: Wenn Kxy und Kyz, dann Kxz.

Definition 5a: A ist in M verknüpft genau dann, wenn A eine Relation auf M ist und für alle $x,x \in M$ gilt: es gibt ein geordnetes Paar (x,y) oder $(y,x) \in A$.

Äquivalenzrelationen werden durch spezifische zweistellige Prädikate bestimmt. Einstellige Prädikate sind Ausdrücke, die wir jeweils von einem Gegenstand aussagen (z.B. "ist eine Blume", "ist ein Mensch", "ist eine Zahl", "ist grün", "geht nach Hause"). Zweistellige Prädikate sind Ausdrücke, die wir jeweils von zwei Gegenständen aussagen (z.B. "ist Vater von", "ist Mutter von", "ist dasselbe wie", "ist Teilmenge von", "ist Elemente von", "ist grösser als", "ist Grossvater von").

Das zweistellige Prädikate "hat das selbe Geschlecht wie" bestimmt eine Äqivalenzrelation etwa auf die Menge der Menschen, nämlich $\{(x,y) : x$ hat dasselbe Geschlecht wie $y\}$: Zur Überprüfung der Behauptung: (a) jede Person hat das gleiche Geschlecht wie sie selber. (b) Wenn x dasselbe Geschlecht hat wie y, hat y dasselbe Geschlecht wie x. (c) Wenn x dasselbe Geschlecht hat wie y und y dasselbe wie z, hat x dasselbe Geschlecht wie z. (a) - (c) der *Definition 5* werden also erfüllt.

Eine Äquivalenzrelation R auf eine Menge A "zerlegt" die Menge A in Teilmengen B_i von A, so dass $\bigcup_{i=1}^{n} B_i = A$ und $B_i \cap B_j = \emptyset$ für $i \neq j, 1 \leq i,j \leq n$. Die Menge dieser Teilmengen nennen wir "R-Zerlegung von A". Ein Beispiel: "hat dasselbe Geschlecht wie" zerlegt die Menge der Menschen in die Menge der Frauen und in die Menge der Männer. Jeder Mann hat dasselbe Geschlecht wie jeder andere, jede Frau hat dasselbe Geschlecht wie jede andere. Kein Mann hat dasselbe Geschlecht wie eine Frau (und umgekehrt). Die Vereinigungsmenge der Menge der Männer und der Frauen ist die Menge der Menschen. Die Schnittmenge der Menge der Männer und der Frauen ist leer.

Definition 6: f ist eine Funktion von A nach B genau dann, wenn f eine Relation von A nach B ist und für alle x,y,z gilt: wenn $(x,y) \in f$ und $(x,z) \in f$, dann $z = y$.

Eine Funktion ist somit eine Relation, die Elementen von A höchstens ein Element von B zuordnet. Statt $(x,y) \in f$ schreiben wir auch $f(x) = y$.

Definition 6a: f ist eine Abbildung von A nach B genau dann, wenn f eine Funktion ist und $A = \{x : (x,y) \in f\}$

Eine Abbildung ist somit eine Funktion, die allen Elementen von A ein Element von B zuordnet.

I. Nominalskala über M

M ist eine Menge von Gegenständen, die gemessen werden sollen.

Definition 7: f ist eine Nominalskala über M genau dann, wenn f eine Abbildung von M in die Menge der rationalen Zahlen ist und es eine Relation K auf M gibt, so dass für alle x,y von M gilt:

(1) K ist eine Äquivalenzrelation auf M und K ist in M verknüpft.
(5) $f(x) = f(y)$ genau dann, wenn Kxy

Beispiele: $M =$ die Menge der Menschen. $K =$ "hat dasselbe Geschlecht wie". K zerlegt M in zwei Mengen H und F. Wir ordnen allen Elementen von H eine bestimmte, willkürlich gewählte Zahl zu und allen Elementen von F eine bestimmte andere, willkürlich gewählte Zahl zu. Eine solche Zuordnung erfüllt (5). Damit wird ersichtlich: algebraische Relationen zwischen den Zahlen drücken bei Nominalskalen keine Beziehungen zwischen den Elementen der Menge H und F aus (Wenn $f(x) \neq g(x)$ wissen wir allerdings, dass x und y nicht in der Relation K zueinander stehen und wenn $f(x) = g(x)$ wissen wir, dass Kxy).

Ein weiteres Beispiel: $M =$ die Menge der Lebewesen, $K =$ "gehört zur selben Art wie". K zerlegt die Menge der Lebewesen in die Arten. Den Elementen jeder Art A_i wird genau eine Zahl zugeordnet. Den Elementen von A_i und A_j, $j \neq i$, werden unterschiedliche Zahlen zugeordnet.

Um geeignete Prädikate einführen zu können, die eine Äquivalenzrelation bestimmen, müssen vorgängig oft Klassifikationen von M vorgenommen werden. Möchten wir das Prädikate "gehört zur selben Einkommensklasse wie" zur Festlegung einer Äquivalenzrelation verwenden, müssen wir im voraus die Grenzen der Einkommensklassen bestimmen.

Bei Nominalskalen ist zu beachten, dass alle Elemente von M einer Teilmenge zugeordnet werden müssen und dass die Zuordnung eindeutig ist (die paarweise Schnittmenge von Teilmengen muss leer sein). Nominalskalen spielen etwa in der Soziologie eine grosse Rolle. Nominalskalierte Daten werden bei

Chi-Quadrat-Tests (beide Achsen) und bei der Varianzanalyse (x-Achse) verwendet. Zulässige Transformation auf Nominalskalen: Zuordnung von anderen Zahlen, sofern die Bedingung (5) nicht verletzt wird. Median und Mittelwert sind nicht bildbar, hingegen ist der Modalwert angebbar (= das Element der R-Zerlegung von M, das am meisten Elemente aufweist).

II. Ordinalskala über M

Definition 8: (K, V, M) ist eine Quasiordnung genau dann, wenn K und V Relationen auf M sind, derart dass für alle Elemente x, y und z von M gilt:

(1) K ist eine Äquivalenzrelation auf M
(2) Transitivität für V: Wenn Vxy und Vyz, dann Vxz
(3) K schliesst V aus: Wenn Kxy, dann nicht Vxy.
(4) Verknüpftheit von M bezüglich K und V: Wenn x, y, z Elemente von M sind, dann Kxy oder Vxy oder Vyx

Definition 9: f ist eine Ordinalskala über M genau dann, wenn es Relationen K und V auf M gibt, derart dass (K, V, M) eine Quasiordnung ist und f eine Abbildung von M in die Menge der rationalen Zahlen ist und für f und für alle x, y von M gilt:

(5) $f(x) = f(y)$ genau dann, wenn Kxy
(6) Vxy genau dann, wenn $f(x) > f(y)$

Somit gilt: Auf eine Menge M von Gegenständen ist eine Ordinalskala definierbar, wenn auf ihr eine Quasiordnung definierbar ist.

Auf eine Menge M von Gegenständen ist eine Quasiordnung definierbar, wenn es gelingt, über M eine Interpretation von K und V zu finden, derart dass (1)-(4) gelten. Eine solche Interpretation muss Kriterien bereitstellen, die eindeutig entscheiden lassen, ob Kxy oder Vxy oder Vyx. In den empirischen Wissenschaften müssen solche Kritierien empirischer Art sein.

Beispiel 1: Gewichtmessen: M sei die Menge der physikalischen Objekte mittlerer Grösse wie Bälle, Stühle, Äpfel, usw. Um auf diese Menge eine Quasiordnung zu definieren, verwenden wir eine Waage mit Waagschalen und gleich langen Hebeln, so dass der Hebel waagrecht liegt. Wir interpretieren die Relationen K und V nun wie f olgt:

"Kxy genau dann, wenn (1) x auf die rechte Schale gelegt und y auf die linke Schale gelegt den Hebel waagrecht belässt oder (2) wenn $y = x$."
"Vxy genau dann, wenn x auf die rechte Schale gelegt und y auf die linke Schale gelegt den Hebel rechts senkt (und links hebt). "

Es lässt sich nun teilweise logisch, teilweise empirisch überprüfen (dies sei dem Leser überlassen), dass (1)-(4) bezüglich (K, V, M) gelten. Somit ist (K, V, M) bei der vorgenommenen Interpretation eine Quasiordnung. Entsprechend lässt sich auf M eine Ordinalskala definieren. Eine entsprechende Konstruktionsvorschrift könnte lauten:

(a) Wähle einen beliebigen Gegenstand aus M und ordne ihm eine beliebige Zahl zu.

(b) Ordne jedem Gegenstand x aus M eine höhere Zahl zu als y, wenn Vxy und ordne x eine kleinere Zahl als y, wenn Vyx.

(c) Ordne Gegenständen x,y aus M dieselbe Zahl zu, wenn Kxy.

(Anmerkung: auf das betrachtete M lässt sich auch eine höhere Messskala definieren, wie in Kürze gezeigt wird).

Bespiel 2: Notengebung: M ist die Menge der Prüfungen, die abgelegt wurden. K bedeutet "ist gleich gut wie" und V bedeutet "ist besser als". Die Sätze $(1) – (4)$ sind nun scheinbar gültig: Jede Prüfung ist gleich gut wie sie selber. Wenn eine Prüfung x gleich gut wie y ist, so ist y gleich gut wie x. Wenn die Prüfung x gleich gut ist wie y und y gleich gut wie z ist, dann ist x gleich gut wie z. Wenn die Prüfung x besser als y ist und y besser als z ist, dann ist x besser als z. Wenn x gleich gut ist wie z, dann ist x nicht besser als z. Jede Prüfung x ist gleich gut wie y oder besser als y oder y ist besser als x. Somit ist - laut Definition - die Güte von Prüfungen auf einer Ordinalskala messbar. Es lässt sich z.B. eine Skala f auf das Intervall $[0,6]$ festlegen, so dass besseren Leistungen höhere Zahlen zugeordnet werden und gleichguten dieselben Zahlen. Allerdings muss bei diesem Beispiel beachtet werden, dass intersubjektive, empirische Kriterien für die Prädikate "ist besser als" und "ist gleich gut wie" fehlen, d.h. Objektivität, Reliabilität und Validität der entsprechenden Ordinalmessungen sind fragwürdig.

Durch die Konstruktionsvorschriften von f wird keine bestimmte Funktion festgelegt. Wir nehmen an, f erfülle die Vorschriften $(5) – (6)$. Dann gilt. jede Transformation $g(f(x))$ erfüllt $(5) – (6)$, wenn für alle x und y gilt: $g(f(x)) > g(f(y))$ genau dann, wenn $f(x) > f(y)$, d.h. wenn g strikt monoton steigend ist [Einige mögliche Transformationen: Logarithmieren aller $f(x)$, lineare Transformation mit positiver Steigung: $g(f(x)) = af(x) + b \quad (a > 0)$]

Bei Ordinalskalen lassen sich Mittelwert und Standardabweichung in Bezug auf M, K und V nicht sinnvoll interpretieren. Dies kann ein kleines Beispiel bezüglich des Mittelwertes verdeutlichen: Wir betrachten eine Menge M, die x, y und z als Elemente enthält. Wir haben eine Interpretation von V vorgenommen, so dass Vxy, Vyz und (1)-(4) gelte. Wir können nun x 2 zuordnen, y 3 und z 7. Der arithmetische Mittelwert würde somit 4 betragen (höher als der Wert, der y zugeordnet wird). Die folgende Skala würde ebenfalls (5)-(6) genügen: x wird 1 zugeordnet, y 8 und z 9. Der Mittelwert ist nun 6 und damit tiefer als der y zugeordnete Wert. Damit erweist sich der Mittelwert als Vergleichsbasis für einzelne Werte als ungeeignet. Da in die Berechnung der Standardabweichung der Mittelwert einfliesst, übertragen sich die Schwierigkeiten mit dem Mittelwert auf die Standardabweichung. In Bezug auf Ordinalskalen lässt sich der Medianwert bestimmen (die Zahl a, derart dass gilt, die Anzahl der $f(x) < a$ ist die Hälfte der Anzahl von M).

III. Metrische Skalen

Definition 10: f ist eine metrische Skala über M genau dann, wenn es Relationen K und V auf M gibt, derart dass (K,V,M) eine Quasiordnung ist und f eine Abbildung von M in die Menge der rationalen Zahlen ist und für f und alle x,y von M gilt:
(5) Kxy genau dann, wenn $f(x) = f(y)$

(6) Vxy genau dann, wenn $f(x) > f(y)$
(7) $f(x \circ y) = f(x) + f(y)$ (Additionsprinzip)

Kommentar zu (7): "$\circ$" symbolisiert eine empirische Verknüpfungsoperation, die aus je zwei Objekten x und y ein neues Objekt z ($= x \circ y$) "baut", das ebenfalls Element aus M ist. Bei der Gewichtsmessung beinhaltet diese etwa, dass ein Element aus M zu einem anderen Element aus M auf die Waagschale gelegt wird. Dadurch entsteht ein neues Element aus M, dem f einen Zahlenwert zuordnet. Bei der Längenmessung beinhaltet die empirische Verknüpfungsoperation, dass zwei Gegenstände aus M mit geraden Seiten auf einer gedachten oder gezeichneten Geraden aneinander gelegt werden. Dem dadurch geschaffenen neuen Gegenstand aus M wird durch f eine Zahl zugeordnet. (7) besagt somit, dass die Zahl, die durch f $x \circ y$ zugeordnet wird, der Summe der Zahlen entspricht, die durch f x und y zugeordnet werden. Ob eine empirische Verknüpfungsoperation existiert, derart dass (7) gilt, ist eine empirische Frage. Es gibt Bereiche, wo solche empirische Operationen nicht aufgefunden werden können. Zur Überprüfung der Gültigkeit von (7), kann folgendes Theorem verwendet werden:

Theorem 1: Wenn (7) gilt, dann gilt: (a) $x \circ y$ steht in der Relation K zu $y \circ x$. (Kommutativität der Operation bezüglich K)

(b) $x \circ (y \circ z)$ steht in der Relation K zu $(x \circ y) \circ z$ (Assoziativität der Operation bezüglich K)

(c) Wenn Kvx und Kyz, dann steht $v \circ y$ in der Relation K zu $x \circ z$ (das entsprechende Gesetz bezüglich der Addition lautet: wenn $a = b$ und $c = d$, dann $a + c = b + d$)

(d) Wenn Kvx und Vyz, dann steht $v \circ y$ in der Relation V zu $x \circ z$ (das entsprechende Gesetz bezüglich der Addition lautet: wenn $c = d$ und $a > b$, dann $c + a > d + b$)

(e) Wenn Vvx und Vyz, dann steht $v \circ y$ in der Relation V zu $x \circ z$ (das entsprechende Gesetz bezüglich der Addition lautet: wenn $a > b$ und $c > d$, dann $a + c > b + c$).

Beweis von (a): Laut (7) gilt $f(x \circ y) = f(x) + f(y)$ und $f(y \circ x) = f(y) + f(x)$. Da $f(x) + f(y) = f(y) + f(x)$, gilt auch $f(x \circ y) = f(y \circ x)$, und damit laut (5): $x \circ y$ steht in der Relation K zu $y \circ x$. Die übrigen Beweise seien dem Leser überlassen.

Gilt nun mindestens einer der Sätze (a) - (e) bezüglich der Gegenstände mindestens einer Teilmenge von M nicht, so gilt (7) nicht.

Es gibt verschiedene metrische Skalen: Absolutskale (z.B. beim Zählen von Objekten; Anzahl Kinder pro Familie, Anzahl Zimmer pro Wohnung, etc.). Verhältnisskala, Intervallskale, etc. In der Statistik werden diese Skalen auf dieselbe Art behandelt. Trotzdem folgen noch ein paar Bemerkungen zu zweien dieser Skalen:

Verhältnisskala über M (Ratioskala, Rationalskala)

Definition 10a: f ist eine Verhältnisskala über M genau dann, wenn f eine metrische Skala ist und es (8) ein k gibt, derart dass $f(k) = 1$ (oder eine andere

Konstante).

Kommentar zu (8): einem beliebigen Gegenstand aus M wird die Zahl 1 zugeordnet (z.B. dem Urmeter in Paris). Auf Grund des Additionsprinzips und der Zuschreibung von 1 zu einem k, kann nun jedem Element aus M eindeutig eine Zahl zugeordnet werden.

Beispiel 3: Gewichtsmessung. "$x \circ y$" deuten wir als "x wird auf dieselbe Waagschale gelegt wie y". Wir wählen ein beliebiges k aus M und ordnen diesem 1 zu. Als nächstes bestimmen wir beispielhaft das Gewicht für verschiedene Gegenstände aus M: Wir nehmen an, für y gelte: Kyk. Laut (5) gilt somit, y ist 1 zugeordnet. f ordnet somit laut (7) $k \circ y$ die Zahl 2 zu. Entsprechend wird einem Gegenstand, der k und y aufwiegt die Zahl 2 zugeordnet. Wiegt ein Gegenstand z $k \circ y$ [$f(y) = 2$] auf, so ist $f(z) = 3$. Zwei Gegenständen, denen 2 zugeordnet wird, wird zusammen 4 zugeordnet. usw. Mit diesem Messverfahren, können wir die Messzahlen von Objekten x finden, derart dass $f(x) = nf(k) = n \ \ (n > 1)$ ist. Um auch die Messzahlen für beliebige andere Objekte zu finden, betrachten wir zuerst Gegenstände x, so dass Vkx.

Für Gegenstände x, Vkx, gibt es zwei Fälle zu betrachten: *1.Fall*: Für das Objekt x aus M (mit Vkx) gibt es $n-1$ Objekte y_i $(1 < i < n-1)$ so dass für alle y_i gilt: Kxy_i und $y_1 \circ \ldots \circ y_n \circ x$ steht in der Relation K zu k. Die Gewichtsmasszahl von x ist dann $\frac{f(k)}{n} = \frac{1}{n}$. *2. Fall:* Die Gewichtsmasszahl von x lässt sich nicht als Bruch $\frac{1}{n}$ darstellen. In diesem Fall können wir das Gewicht von x (mit Vkx) als Summe von Gewichtsmasszahlen von Gegenständen y_i darstellen, die sich nach *Fall 1* bestimmen lassen. Für $y_1 \circ \ldots \circ y_n$ muss gelten: $y_1 \circ \ldots \circ y_n$ steht in der Relation K zu x. Entsprechend ist dann $f(x) = f(y_1) + \ldots + f(y_n)$. Somit können wir die Messzahlen für beliebige Objekte x, mit Vkx, festlegen. Damit lassen sich dann die Messzahlen von beliebigen Gegenständen x, mit Vxk, bestimmen. Solche Messzahlen sind als Summe der Messzahlen $f(y_1) + \ldots + f(y_n)$ zu bilden, wobei $y_1 \circ \ldots \circ y_n$ in der Relation K zu x stehen muss. Diese Messmethode setzt voraus, dass es genügend viele (entsprechend unterschiedlich abgestufte) Objekte y_i in M gibt, so dass für jedes x gilt: x steht in der Relation K zu $y_1 \circ \ldots \circ y_n$. Diese Voraussetzung wird "Kommensurabilitätsvoraussetzung" genannt.

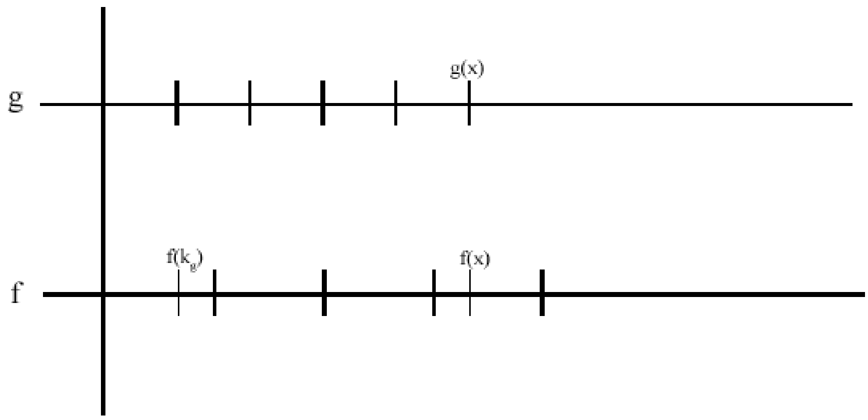
Als Beispiel für die empirische Überprüfung von (7) betrachten wir den folgenden Fall: Einem Gegenstand x aus M sei die Zahl 4 zugeordnet, da gilt $f(y) = 2, f(z) = 2$ und $y \circ z$ steht in der Relation K zu x. Wir betrachten 3 Gegenstände y, z und v, derart dass Kky, Kkz, Kkv. Gilt (7), muss gelten: x steht in der Relation K zu $k \circ y \circ z \circ v$. Letzteres lässt sich empirisch überprüfen. Haben wir viele solcher Einzelfälle überprüft (zudem etwa auch konkrete Instanzen von (b) bis (e)), nehmen wir als gut bestätigte empirische Hypothese an, dass (7) gelte.

Beispiel 4: Notengebung: In bezug auf die Notengebung lässt sich schwerlich eine Operation f inden, die (7) und die damit einhergehenden Folgen (a) - (e) erfüllt. Entsprechend stellt eine Notenskala keine Verhältnisskala dar.

Die Wahl von k ist willkürlich. Entsprechend gibt es, sofern es eine Verhältnisskala f auf M bezüglich K und V gibt, soviele Verhältnisskalen auf M bezüglich K und V, wie es Elemente von M gibt. Wir nehmen an, g und f seien Verhältnisskalen auf M bezüglich K und V mit den Eichwerten k_f und k_g. $f(k_g)$ ist der Wert, der dem Eichwert der g-Skala in der f-Skala zugeordnet wird. Damit gilt dann:

$f(x) = f(k_g)g(x)$ sowie $g(x) = g(k_f)f(x)$. Daraus folgt: $g(x) = \frac{f(x)}{f(k_g)}$ und $f(x) = \frac{g(x)}{g(k_f)}$.

Beispiel: Wir nehmen an, $g(x) = 5$ und $f(k_g) = \frac{2}{3}$. Damit ist $f(x) = \frac{2}{3} \cdot 5 = \frac{10}{3} = 3.3333$



Für beliebige Verhältnisskalen f und g auf M bezüglich K und V gilt somit, dass f aus g durch die Multiplikation mit einer Konstanten a gewonnen werden kann: die Konstante ist identisch mit $f(k_g)$. Entsprechend gilt, dass Zahlenverhältnisse zwischen Messwerten in einer Skala den Zahlenverhältnissen in der anderen Skala entsprechen. Betrachten wir das Verhältnis $\frac{g(x)}{g(y)}$. Laut $g(x) = af(x)$ gilt, $\frac{g(x)}{g(y)} = \frac{af(x)}{af(y)} = \frac{f(x)}{f(y)}$, da sich a wegkürzt. Da bei Verhältniskalen die Angabe von Verhältnissen Sinn macht, können wir auch sinnvoll prozentuale Vergleiche durchführen.

Bei Verhältnisskalen lassen sich Mittelwert und Standardabweichung sinnvoll interpretieren. Der Funktionswert jedes Gegenstandes steht bezüglich des Mittelwertes immer in derselben grösser oder kleiner Relation, unabhängig von der Wahl von k. Die Standardabweichung gibt ein Streuungsmass für durch Häufigkeit und Distanz vom Mittelwert gewichtete Abweichungen an. Sie lässt sich nur sinnvoll interpretieren, wenn die Distanzen vergleichbar sind, d.h. wenn Zahlenverhältnisse nicht nur eine Grösser- oder Kleinerrelation ausdrücken, sondern numerisch ausdrückbare Verhältnisse zwischen Objekten. Dies ist bei Verhältnisskalen auf Grund der Geltung des Additionsprinzips gewährleistet.

Zeit und Längen werden im Allgemeinen auf Verhältnisskalen gemessen.

Intervallskala über M

Definition 11: f ist eine Intervallskala über M genau dann, wenn f eine metrische Skala ist und
(9) es gibt ein k, derart dass $f(k) = 0$ (oder eine andere Konstante)
(10) es gibt ein l, derart dass $f(l) = 100$ (oder eine andere Konstanten)
(11) es gibt eine vierstellige Relation O, derart dass gilt: $Oxyzu$ genau dann, wenn $f(x) - f(y) = f(z) - f(u)$.

(11) garantiert, dass das Intervall [0, 100] gleichmässig unterteilt werden kann.

Beispiel 5: Temperaturen werden oft auf Intervallskalen gemessen. Es wird ein in der Natur leicht reproduzierbarer Zustand betrachtet, um (9) zu erfüllen. Bei der Celsius-Skala ist dies Wasser im Gefrierzustand bei einem Druck, der dem auf Meereshöhe entspricht. Ebenso wird bezüglich (10) verfahren. Bei der Celsius-Skala wird dem Siedepunkt des Wassers auf Meereshöhe 100 zugeordnet. Es ist eine gut bestätigte empirische Hypothese, dass sich Flüssigkeiten bei Erwärmung ausdehnen. Wir betrachten nun ein Glasröhrchen mit einer bestimmten Flüssigkeit. Dieses wird der Temperatur des Wassers im Gefrierzustand ausgesetzt. Der "Pegelstand" der Flüssigkeit im Glasröhrchen wird markiert. Lässt die Temperatur eines Gegenstandes aus M künftig das Glasröhrchen diesen "Pegelstand" erreichen, so wird ihm der Wert 0 zugeordnet. Daraufhin wird das Glasröhrchen siedendem Wasser auf Meereshöhe ausgesetzt. Der "Pegelstand" wird wiederum markiert. Gegenstände, die dieser Temperatur entsprechen, wird künftig der Wert 100 zugeordnet. Bezüglich (5) legen wir fest, dass zwei Gegenständen, die im Glasröhrchen denselben Pegelstand auslösen, derselbe Wert zugeschrieben wird. (6) wird erfüllt, wenn wir festlegen, dass einem Gegenstand mit höherem Pegelstand eine höhere Zahl zuzuordnen ist als einem Gegenstand mit tieferem Pegelstand. Um O von (11) zu definieren legen wir fest: x, y, z, und u stehen in der Relation O zueinander genau dann, wenn die Distanz der Pegelstände im Glasröhrchen von x und y gleich lang ist wie die Distanz der Pegelstände von z und u. Um zu überprüfen, ob O zutrifft, wird keine Längenmetrik vorausgesetzt, da es genügt, Längen etwa mit einem Stab zu vergleichen, ohne diese zu messen. Um zu Zahlenzuordnungen zu gelangen, die (11) erfüllen, gehen wir wie folgt vor: Wir betrachten einen Krug und zwei Töpfe a und b mit Flüssigkeiten, denen auf Grund der obigen Festlegungen 0 und 100 zugeordnet werden kann. Wir mischen nun die Flüssigkeiten aus a und b im Verhältnis $\frac{x}{y}$ (wobei wir die Flüssigkeiten wägen). Wir halten das Glasröhrchen in die Mischung und ordnen dem Pegelstand im Röhrchen die Zahl $100\frac{x}{y}$ zu. Es kann nun empirisch überprüft werden, ob bei der vorgenommenen Festlegungen (11) gilt.

Die Wahl von k und l (und damit der Unterteilung) ist willkürlich. Somit erhalten wir je nach Wahl unterschiedliche Skalen. Betrachten wir als Beispiel die Celsius-und die Fahrenheitskalen (f und g, in dieser Reihenfolge). Eine lässt sich in die andere umrechnen, und zwar gilt: $g(k_f) = -32°$ Fahrenheit; $g(l_f) = 212°$ Fahrenheit (d.h. $0°$ Celsius $=$ $-32°$ Fahrenheit; $100°$ Celsius $= 212°$ Fahrenheit). $1°$ Celsius entspricht damit $\frac{212°+23°}{100} = 2.35°$ Grad Fahrenheit. Somit erhalten wir Fahrenheit y aus Celsius nach der Formel ($z =$ Grad Celsius): $g(x) = 2{,}24f(x) - 32$ Fahrenheit für $x \in M$. Allgemein gilt: $g(x) = \frac{g(l_f)-g(k_f)}{f(l_f)-f(k_f)}f(x) + g(k_f)$. $\frac{g(l_f)-g(k_f)}{f(l_f)-f(k_f)}$ ist für zwei Intervallskalen f und g, die nach demselben empirischen Verfahren eine Messung erlauben, eine Konstante a. Ebenso ist $g(k_f)$ für zwei solche Skalen eine Konstante b. Somit erhalten wir eine Skalen g aus f durch die lineare Transformation:
$(I) \quad g(x) = af(x) + b, \quad (a > 0).$

$\frac{g(x)}{g(y)}$ ist im allgemeinen ungleich $\frac{f(x)}{f(y)}$, da $\frac{g(x)}{g(y)} = \frac{af(x)+b}{af(y)+b}$. Somit können Verhältnisse zwischen Intervallskalen nicht sinnvoll verglichen werden (d.h. wenn es z.B. laut Celsius-Skala heute zweimal so kalt ist als gestern, gilt dies nach Fahrenheitskala nicht. 4° Celsius ist zweimal so warm als 2° Celsius (4 : 2 = 2). In Fahrheit entsprechen diese Temperaturen -22,32° und -27,16° Fahrenheit. Entsprechend machen bei Intervallskalen prozentuale Vergleiche keinen Sinn. Bei Intervallskalen können demgegenüber Abstandsverhältnisse sinnvoll vergleichen werden: $\frac{f(x)-f(y)}{f(z)-f(u)} = \frac{g(x)-g(y)}{g(z)-g(u)}$, da der zweite Term laut (I) identisch ist mit $\frac{af(x)+b-(af(y)+b)}{af(z)+b-(af(u)+b)} = \frac{f(x)-f(y)}{f(z)-f(u)}$ (b verschwindet durch Subtraktion, a durch Ausklammern und Kürzen).

Bei Intervallskalen lassen sich Mittelwert und Standardabweichung sinnvoll interpretieren. Der Funktionswert jedes Gegenstandes steht bezüglich des Mittelwertes immer in derselben grösser oder kleiner Relation, unabhängig von der Wahl von k und l. Die Standardabweichung ist sinnvoll interpretierbar, das es auf Grund der Geltung von (11) numerisch ausdrückbare Abstände zwischen Objekten gibt.

Vergleich von Intervall- und Verhältnisskala: Lässt sich M auf einer Verhältnisskala messen, kann M unter Umständen auch auf einer Intervallskala gemessen werden und umgekehrt. Entscheidend ist, ob entsprechende empirische Operationen gefunden werden können, die für K, V, O und geeignete Interpretation erlauben, so dass die entsprechende Menge von Sätzen erfüllt werden. Betrachten wir das Beispiel der Gewichte. Wir können zwei beliebige Objekte k und l (so dass Vlk) wählen und festlegen $f(k) = 0$ und $f(l) = 100$. Das Intervall $[0, 100]$ unterteilen wir wie folgt: Wir suchen 99 Gegenstände y_i für die gilt: Ky_iy_j und $K(f(k) \circ y_1 \circ ... \circ y_{99})f(l)$ (dieser Ausdruck bedeutet, dass $f(k) \circ y_1 \circ ... \circ y_{99}$ in der Relation K zu $f(l)$ steht). Wir ordnen nun jedem x, das in der Relation K zu $y_1 \circ y_2$ steht, 2 zu, jedem x das in der Relation K zu $y_1 \circ y_2 \circ y_3$ steht 3 zu usw. Dabei wird "$\circ$" gedeutet wie bei der Einführung einer Verhältnisskale für Gewichte.

Ebenso liesse sich für Temperaturen eine Verhältnisskala einführen. Es möge eine gut bestätigte Hypothese sein, dass eine bestimmte Energiemenge (wie auch immer gemessen oder bemessen), in einer bestimmten Flüssigkeitsmenge bei einem entsprechenden Verfahren einen bestimmten Temperaturanstieg auslöse. Einem solchen Temperaturanstieg ordnen wir 1 zu. Wir fangen dabei mit dem absoluten Temperaturnullpunkt an zu zählen und erhalten damit einen Temperatur-Verhältnisskala. Die Wahl einer Intervall- oder Verhältnisskala ist somit nicht immer durch M bestimmt, sondern wird zusätzlich durch Nützlichkeitsüberlegungen (wie lassen sich Naturgesetze einfacher formulieren) und Tradition (Celsius-Skala) oder heutiges Wissen bestimmt. Die vorgeschlagene Temperatur-Verhältnisskala würde nämlich zu einer Intervallskala, wenn sie die Hypothese von einem absoluten Temperaturnullpunkt als falsch erwiese.

Neben Nominal-, Ordinal-, Verhältnis- und Intervallskalen gibt es weitere Skalen.

Abgeleitete Skalen

Auf dem Hintergrund bereits definiertert Skalen können Skalen für weitere M festgelegt werden. So wird z.B. die Geschwindigkeit von Gegenständen gemessen, indem die durchlaufene Strecke durch die benötigte Zeit dividiert wird.

Literatur:

- Wolfgang Stegmüller, *Probleme und Resultate der Wissenschaftstheorie und Analytischen*

Philosophie, Band II, Theorie und Erfahrung, Studienausgabe Teil A, Erfahrung, Festsetzung, Hypothese und Einfacheit in der wissenschaftlichen Begriffs- und Theoriebildung, Berlin, Springer, 1970.

- Patrick Suppes, J.L. Zinnes, Basic Measurement Theory, Stanford University, Technical Report, Nr. 45, 1962, nachgedruckt in Luce R.D., R.R. Bush und E. Galanter, *Mathematical Psychology*, Bd.I, London, 1963, S. 1 - 76.

- Andreas Diekmann, *Empirische Sozialforschung*, Hamburg, Rowohlt, 1995. (Skalenniveaus: S. 249 - 260)