

## Konträre und kontradiktorische Sätze

In der aristotelischen Logik werden folgende Satzarten (= kanonische Sätze) unterschieden:

- A-Sätze: "Alle F sind G".
- E-Sätze: "Alle F sind nicht G" (= Kein F ist G).
- I-Sätze: "Es gibt (mindestens) ein F, das ein G ist".
- O-Sätze: "Es gibt (mindestens) ein F, das nicht ein G ist."

In der Folge setzen wir jeweils voraus, dass "F" und "G" in allen Sätzen jeweils gleich interpretiert sind.

Die Negation von A-Sätzen ergibt "Nicht alle F sind G". Dieser Satz ist äquivalent zum O-Satz: "Es gibt ein F, das nicht ein G ist". Umgekehrt gilt: Die Negation des O-Satzes "Nicht es gibt ein F, das nicht ein G ist". ist äquivalent zum A-Satz "Alle F sind G". Somit ergibt die Konjunktion eines A-Satzes und eines O-Satzes einen Widerspruch (= contradictio). In der traditionellen Logik werden deshalb A-Sätze als "kontradiktorisch" zu O-Sätzen bezeichnet (oder als "das kontradiktorische Gegenteil").

Analoges gilt für E- und I-Sätze. Die Negation von I-Sätzen ergibt: "Nicht alle F sind nicht G". Dies ist äquivalent mit "Es gibt ein F, das ein G ist". Umgekehrt lautet die Negation eines I-Satzes: "Nicht es gibt ein F, das ein G ist". Dieser Satz ist äquivalent mit "Alle F sind nicht G". Somit ergibt die Konjunktion eines E- und eines I-Satzes einen Widerspruch. Entsprechend werden in der traditionellen Logik E- und I-Sätze ebenfalls als "kontradiktorisch" bezeichnet. (Bei kontradiktorischen Sätzen können wir aus der Wahrheit eines der Sätze auf die Falschheit des anderen schliessen und umgekehrt. Es können nicht beide Sätze wahr sein und es können nicht beide Sätze falsch sein).

Demgegenüber werden A-Sätze und E-Sätze als "konträr" bezeichnet. Das "Konträre" von "Alle F sind G" wäre diesem Sprachgebrauch zu Folge "Kein F ist G", was äquivalent ist mit "Alle F sind nicht G". (Konträre Sätze können nicht beide wahr sein, d.h. die Konjunktion von zwei konträren Sätzen ist widersprüchlich. Konträre Sätze können aber beide falsch sein) (Für "A und B sind konträr" kann man auch sagen "A ist das konträre Gegenteil von B").

I- und O-Sätzen wurden in der traditionellen Logik als "subkonträr" bezeichnet: "Es gibt ein F, das ein G ist" ist demzufolge subkonträr zu "Es gibt ein F, das nicht ein G ist". (subkonträre Sätze sind nicht beide falsch, d.h. die Konjunktion der Negationen von subkonträren Sätzen stellt einen Widerspruch dar. Subkonträre Sätze können jedoch beide wahr sein) (Für "A und B sind subkonträr" kann man auch sagen "A ist das subkonträre Gegenteil von B").

Lösen Sie auf dem Hintergrund dieser Ausführungen die folgenden Aufgaben:

1. "Jede Lust ist eine Todsünde" (aus: Joachim Jungius: Logica Hamburgensis. Hamburg, 1957 [1638], S. 181)

- Formalisieren Sie diesen Satz zuerst mit dem Allquantor und dann mit dem Existenzquantor.
  - Formalisieren Sie das kontradiktorische Gegenteil mit dem Allquantor und mit dem Existenzquantor.
  - Liefern Sie die entsprechenden umgangssprachlichen Sätze.
  - Formalisieren Sie das konträre Gegenteil mit dem Allquantor und mit dem Existenzquantor.
  - Liefern Sie die entsprechenden umgangssprachlichen Sätze.
2. "Einige Lust ist ein Gut" (aus: Aristoteles, 1. Analytik, I,2, 25a6ff)
- Formalisieren Sie diesen Satz zuerst mit dem Allquantor und dann mit dem Existenzquantor.
  - Formalisieren Sie das kontradiktorische Gegenteil mit dem Allquantor und mit dem Existenzquantor.
  - Liefern Sie die entsprechenden umgangssprachlichen Sätze.
  - Formalisieren Sie das subkonträre Gegenteil mit dem Allquantor und mit dem Existenzquantor.
  - Liefern Sie die entsprechenden umgangssprachlichen Sätze.
3. Ist der Gegensatz zwischen Beispiel 1 und 2 konträr, kontradiktorisch oder weder noch?
4. Übersetzen Sie in die formale Sprache der Prädikatenlogik "Wer die NZZ liest, bekommt keinen Kater".
5. Übersetzen Sie in die formale Sprache der Prädikatenlogik: "Studierende und AHV-Bezüglerinnen haben freien Eintritt".
6. Welcher Unterschied besteht in logischer Hinsicht zwischen "Bellende Hunde beißen nicht" und "Parallelen schneiden sich nicht".
7. Übersetzen Sie in die formale Sprache der Prädikatenlogik "Keine Rosen ohne Dornen".
8. Übersetzen Sie in die formale Sprache der Prädikatenlogik "Es nicht alles Gold, was glänzt".
9. Geben Sie das kontradiktorische Gegenteil von 8. in formaler und in umgangssprachlicher Formulierung an.

## Lösungsvorschläge

1. 1. Man erhält z.B.

- Formalisierung:  $(x)(Lx \rightarrow Tx)$  ("L" für "ist eine Lust" und "T" für "ist eine Todsünde" - man beachte, dass wir dabei abstrakte Gegenstände setzen, die man als Sünden und Lust klassifiziert);  $\neg(\exists x)(Lx \wedge \neg Tx)$
- Formalisierung des kontradiktorischen Gegenteils:  $\neg(x)(Lx \rightarrow Tx)$ ;  $(\exists x)(Lx \wedge \neg Tx)$
- Formulierung mit Existenz: "Es gibt keine Lust, die keine Todsünde ist". Kontradiktorisches Gegenteil: "Nicht jede Lust ist eine Todsünde" und "Es gibt eine Lust, die keine Todsünde ist".
- Das konträre Gegenteil:  $(x)(Lx \rightarrow \neg Tx)$ ;  $\neg(\exists x)(Lx \wedge Tx)$
- "Jede Lust ist nicht eine Todsünde" "Nicht es gibt eine Lust, die eine Todsünde ist". (= Keine Lust ist eine Todsünde)

2. Man erhält z.B.

- $\neg(x)(Lx \rightarrow \neg Gx)$ . ("G" für "ist ein Gut")  $(\exists x)(Lx \wedge Gx)$ .
- $(x)(Lx \rightarrow \neg Gx)$ .  $\neg(\exists x)(Lx \wedge Gx)$ .
- "Jede Lust ist nicht ein Gut." "Es gibt keine Lust, die ein Gut ist".
- $\neg(x)(Lx \rightarrow Gx)$ ;  $(\exists x)(Lx \wedge \neg Gx)$ .
- "Nicht jede Lust ist ein Gut". "Es gibt eine Lust, die nicht ein Gut ist".

3. Weder noch. Lassen wir jedoch unsere Interpretationskunst walten und tun so, als ob wir die Wörter "Lust", "Gut" und "Todsünde" verstünden, so gilt vermutlich: "Keine Todsünde ist ein Gut". Da jede Lust eine Todsünde ist, ist keine Lust ein Gut. Somit wären die beiden Sätze kontradiktorisch.

4.  $(x)(Lxn \rightarrow \neg Kx)$  ("L" für "liest", "n" für die NZZ, "K" für "einen Kater bekommen").

5.  $(x)((Sx \vee Ax) \rightarrow Fx)$  ("S" für "ist studierend", "A" für "ist AHV-Bezügerin" und "F" für "freien Eintritt haben"). Im Alltagssatz steht "und", aber offensichtlich ist nicht gemeint, dass man sowohl studierend als auch AHV-Bezügerin sein muss, um einen freien Eintritt zu haben.

6. "Bellende Hunde beißen nicht" wird übersetzt als  $(x)(Hx \rightarrow \neg Bx)$  ("H" für "bellender Hund", "B" für "beißen"). Eine feinere Übersetzung würde ergeben:  $(x)((Hx \wedge Ex) \rightarrow \neg Bx)$  ("H" für "ist ein Hund", "E" für "ist bellend", "B" für "beißen"). "Parallelen schneiden sich nicht" wird übersetzt mit  $(x)(y)(Pxy \rightarrow \neg Sxy)$  ("P" für "ist parallel zu", "S" für "schneidet"). Im ersten Satz haben wir nur einstellige Prädikate vor uns, im zweiten Satz nur zweistellige.

7.  $(x)(Rx \rightarrow Dx)$  ("R" für "ist eine Rose", "D" für "hat Dornen").

8.  $\neg(x)(Fx \rightarrow Gx)$  ("F" für "glänzt", "G" für "ist Gold").

9. Alles was glänzt ist Gold:  $(x)(Fx \rightarrow Gx)$

Quelle: der obige Übungssatz wurde den Übungsaufgaben, Übungsblatt 9, zur Vorlesung "Einführung in die moderne Logik", WS 98/99, Philosophisches Institut der Universität Zürich, entnommen)