Regeln der Theorie der Quantifikation
(verbesserte Fassung der Regeln von Copi, Einführung in die Logik, Kurseinheit 3316)

"v" ist eine Variable über Namenbuchstaben, x ist eine Variable über die Variablen "x", "y", "z", ...; "φx" ist eine Variable über Schemata der Prädikatenlogik, die mindestens einmal die Variable x frei enthalten (x als metasprachliche Variable u. a. über "x" zu verwenden ist nicht sehr geschickt. Ich halte mich möglichst nahe an Copi); "(x)(φx)" ist eine Variable über Schemata, die aus "(x)" und "(φx)" in dieser Reihenfolge zusammengesetzt sind; "(φv)" ist eine Variable über Schemata, die mindestens einmal den Namenbuchstaben v enthalten).

1) AI: Allgemeine Instantiation
(auch "Universelle Spezialisierung", "Universalquantorelimination", usw.)

Aus (x)(φx) folgt φv, sofern
jede in (x)(φx) durch (x) gebundene Variable durch v ersetzt wird.

(zur Einschränkung: beim Schluss von "(x)(Fx ⊃ Gx)" auf "Fa ⊃ Gx" würde erstens der einheitliche Bezug von x zerstört. Zweitens würde x zur freien Variable)

2) AG: Allgemeine Generalisierung
(Universelle Generalisierung, Universalquantoreinführung, usw.)

Aus φv folgt (x)(φx), sofern
(1) alle v in φv durch x ersetzt werden,
(2) v in keinen Prämissen von φv vorkommt,
(3) x nicht durch einen Quantor in φv eingefangen wird.

(2) kann überprüft werden, indem man zurückverfolgt, welche Prämissen für die Ableitung von φv verwendet wurden. Beachtet werden muss dabei, dass durch den Konditionalen Beweis und die RAA die Zusatzannahme wegfällt und nicht mehr als Prämisse gilt. Dies ist allerdings nur der Fall, wenn die Regel AG ausserhalb der Pfeilklammer angewendet wird. Die Bedingungen drücken aus, dass v beliebig ist. Damit erübrigt sich die Einführung eines bestimmten Variablentyps (Copi führt die Variable "y" für "jedes beliebig ausgewählte Individuum" ein. Diese Methode ist nicht sehr elegant, da je nach gewünschter Konklusion (Allsatz oder nicht!) andere Buchstaben verwendet werden müssen)

Zu den Einschränkungen:
(1) Aus "(x)Fxx" folgt "Faa". Daraus würde ohne Einschränkung folgen "(x)Fxa", was falsch ist z.B. für "F" interpretiert als "ist identisch mit";

(2) Aus "Fa" würde ohne Einschränkung folgen "(x)Fx", was falsch ist, da aus "Fury ist ein Pferd" nicht folgt "Alle Objekte sind Pferde"

(3) Aus "(x)(Nx ⊃ (∃y)(Gyx))" folgt "Na ⊃ (∃y)(Gya)". Es würde ohne Einschränkung "(y))(Ny ⊃ (∃y)(Gyy))" folgen, was falsch ist für "N" interpretiert als "ist eine natürliche Zahl" und "G" interpretiert als "ist grösser als").

3) EG: Existenzgeneralisierung

(Existenzielle Generalisierung, Existenzquantoreinführung)

Aus φv folgt (∃x)(φx), sofern
x nicht durch einen in φv bereits vorkommenden Quantor eingefangen wird.

(Zur Einschränkung: Aus "(x)(Nx ⊃ (∃y)(Gyx))" folgt "Na ⊃ (∃y)(Gya)". Es würde sonst "(∃y) (Ny ⊃ (∃y)(Gyy))" folgen, was falsch ist für "N" interpretiert als "ist eine natürliche Zahl" und "G" interpretiert als "ist grösser als").

4) EI: Existenzinstantiation

(Existenzielle Spezialisierung, Existenzquantorelimination, usw.)

Wenn φv, A_1, ..., A_i ∴ C gilt, dann gilt (∃x)(φx), A_1, ..., A_i ∴ C, sofern
(1) v in folgenden Schemata nicht vorkommt: C, (∃x)(φx), A_1, ..., A_i
(2) φv aus (∃x)(φx) entsteht, indem alle durch (∃x) gebundenen Variablen durch v ersetzt werden.

Bei Copi ist die Regel falsch formuliert. Aus "Es gibt grüne Bäume" folgt nicht, dass "Anton ein grüner Baum ist". Dies wäre aber bei Copi der Fall, da "Es gibt grüne Bäume" den Namen "Anton" nicht enthält. Um solche Fehlschlüsse zu verhindern, muss die Darstellung der Beweise wie folgt geändert werden (Copi macht dies in seiner "Symbolic Logic"): Wird nach (∃x)(φx) das Schema φv hingesetzt, handelt es sich nicht um einen Schluss aus (∃x)(φx), sondern um eine neue Annahme. Deshalb wird rechts "angenommen" hingeschrieben und es ist eine Pfeilklammer zu verwenden. Die Regel EI wird erst angewendet, sobald man diese Zusatzannahme wegbringt (siehe beiliegende Beispiele). Nach der Anwedung von EI ruht C nicht mehr auf φv, sondern auf (∃x)(φx).

Zu den Einschränkungen:
zu "v darf in A_1,...,A_i nicht vorkommen": Aus "Ma" und "Ba" folgt "(∃x)(Mx.Bx)". Ohne die Einschränkung würde damit mit der Regel aus "Ma" und "(∃x)(Bx)" folgen: "(∃x)(Mx.Bx)", was falsch ist für "M" interpretiert als "ist ein Mensch", "a" interpretiert als "Anton" und "B" interpretiert als "ist ein Baum".

zu "v darf in C nicht vorkommen": Aus "Pa" folgt "Pa". Ohne die Einschränkung der Regel würde damit aus "(∃x)(Px)" das Schema "Pa" folgen, was falsch ist für "P" interpretiert als "ist ein Pferd" und "a" interpretiert als "Anton" (wobei "Anton" einen Menschen bezeichnet).

zu "v darf in (∃x)(φx) nicht vorkommen": Aus "Faa" folgt "(∃x)(Fxx)". Würde die Einschränkung nicht beachtet, würde damit die Regel den Schluss von "(∃y)(Fya)" auf "(∃x)(Fxx)" zulassen, was falsch ist für "F" interpretiert als "ist grösser als".

zu (2): Sonst würde aus "(∃x)(Fx.Gx)" z.B. "Fa.Gx" entstehen. Dadurch wird der Bezug der Variable zerstört und eine freie Variable produziert.

Beispiele für die korrekte Anwendung von EI

Beispiel von S. 101 (2. Kurseinheit)

1.	(x)(Kx ⊃ Lx)	
2.	(∃x)(Mx.Kx) / ∴ (∃x)(Mx.Lx)	
3.	Ma.Ka	angenommen
4.	Ka ⊃ La	1,AI
5.	Ka.Ma	3, Komm
6.	Ka	5, Simp.
7.	La	5,6,M.P.
8.	Ma	3, Simp.
9.	Ma.La	8,9, Konj.
10.	(∃x)(Mx.Lx)	9, EG
11.	(∃x)(Mx.Lx)	3-10,EI

Beispiel 12.1. von S. 118 (2. Kurseinheit)

1.	(x)(Ax ⊃ ~Bx)	
2.	(∃x)(Cx.Ax) / ∴ (∃x)(Cx.~Bx)	
3.	Ca.Aa	angenommen
4.	Aa ⊃ ~Ba	1, AI
5.	Aa.Ca	3, Komm
6.	Aa	5, Simp.
7.	~Ba	4,6, M.P.
8.	Ca	3, Simp.
9.	Ca.~Ba	8.7, Konj.
10.	(∃x)(Cx.~Bx)	9, EG
11.	(∃x)(Cx.~Bx)	3-10,EI

Beispiel 12.1.4. von S. 119 (2. Kurseinheit)

1.	(∃x)(Jx.Kx)	
2.	(x)(Jx ⊃ Lx) / ∴ (∃x)(Lx.Kx)	
3	Ja.Ka	1, angenommen
4.	Ja ⊃ La	2, AI
5.	Ja	3, Simp.
6.	La	4,5, M.P.
7.	Ka.Ja	4, Komm
8.	Ka	7. Simp.
9.	La.Ka	6,8, Konj.
10.	(∃x)(Lx.Kx)	9, EG
11.	(∃x)(Lx.Kx)	3-10, EI